Der Satz von Taylor

Gierhardt

Satz von Taylor: Es sei I ein beliebiges Intervall und $x_0 \in I$ im Innern von I. f sei beliebig oft differenzierbar auf I. Dann gilt:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i + R_n(x,x_0) \quad \text{mit} \quad R_n(x,x_0) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt$$

Beweis (mit vollständiger Induktion):
Induktionsanfang:

$$k = 0 : R_0 = \int_{x_0}^{x} f'(t)\, dt = f(x) - f(x_0) \Rightarrow f(x) = f(x_0) + R_0(x,x_0)$$

Induktionsschritt: Die Behauptung sei richtig für **ein** beliebiges $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt also

$$f(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i + R_k(x,x_0) \quad \text{mit} \quad R_k(x,x_0) = \frac{1}{k!}\int_{x_0}^{x} \underbrace{(x-t)^k}_{u'}\underbrace{f^{(k+1)}(t)}_{v}\, dt \qquad (1)$$

Mit partieller Integration ergibt sich

$$\begin{aligned} R_k(x,x_0) &= \frac{1}{k!}\left[\left.\frac{-(x-t)^{k+1}}{k+1} f^{(k+1)}(t)\right|_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} \frac{-(x-t)^{k+1}}{k+1} f^{(k+2)}(t)\, dt \right] \\ &= \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1} + \frac{1}{(k+1)!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^{k+1} f^{(k+2)}(t)\, dt \end{aligned}$$

In (1) eingesetzt erhält man

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=0}^{k} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i + \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1} + \frac{1}{(k+1)!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^{k+1} f^{(k+2)}(t)\, dt \\ &= \sum_{i=0}^{k+1} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i + R_{k+1}(x,x_0), \end{aligned}$$

d.h. die Behauptung gilt auch für $k+1$.

Bemerkungen:

- Der Term $R_n(x,x_0)$ heißt Restglied und gestattet die Abschätzung des Fehlers einer Approximation.
- Bei diesem Beweis muss die Funktion f beliebig oft differenzierbar sein. Man kann den Satz aber auch beweisen, wenn man nur voraussetzt, dass f wenigstens $(n+1)$-mal differenzierbar ist.
- Brooke Taylor, 18.08.1685–29.12.1731, englischer Mathematiker und Sekretär der Royal Society in London, lieferte auch wichtige Arbeiten zur Schwingungslehre und Ballistik.