Was sie schon immer über die Relativitätstheorie wissen wollten

> *„Das wichtigste Ergebnis der speziellen Relativitätstheorie betraf die träge Masse körperlicher Systeme. Es ergab sich, daß die Trägheit eines Systems von seinem Energieinhalt abhängen müsse und man gelangte geradezu zur Auffassung, daß träge Masse nichts anderes sei als latente Energie. Der Satz von der Erhaltung der Masse verlor seine Selbständigkeit und verschmolz mit dem von der Erhaltung der Energie.“* [1]
>
> *„Eine Konsequenz ist mir noch in den Sinn gekommen . . . Eine merkliche Abnahme der Masse müßte beim Radium erfolgen. Die Überlegung ist lustig und bestechend; aber ob der Herrgott nicht darüber lacht und mich an der Nase herumgeführt hat, das kann ich nicht wissen.“* [2]

Die wichtigsten Ergebnisse:

1. **Postulat 1:** Die Geschwindigkeit c des Lichts im Vakuum ist in jedem Bezugssystem gleich.
2. **Postulat 2:** Alle Inertialsysteme sind zur Beschreibung der Naturvorgänge gleichberechtigt.
3. Gleichzeitigkeit ist relativ.
4. **Zeitdilatation:** Eine bewegte Uhr U' geht langsamer im Vergleich mit ruhenden Uhren, an denen sie vorbeikommt. Für ihre Zeit t' gilt:

$$t' = t \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = t \cdot \sqrt{1 - \beta^2}$$

5. **Längenkontraktion:** Ein mit der Geschwindigkeit v in Längsrichtung bewegter Stab wird gegenüber seiner Ruhe- oder „Eigenlänge“ L verkürzt gemessen:

$$L' = L \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = L \cdot \sqrt{1 - \beta^2}$$

   Quer zur Bewegungsrichtung tritt keine Kontraktion auf.

[1] A. Einstein, Mein Weltbild, Berlin 1956, S.129

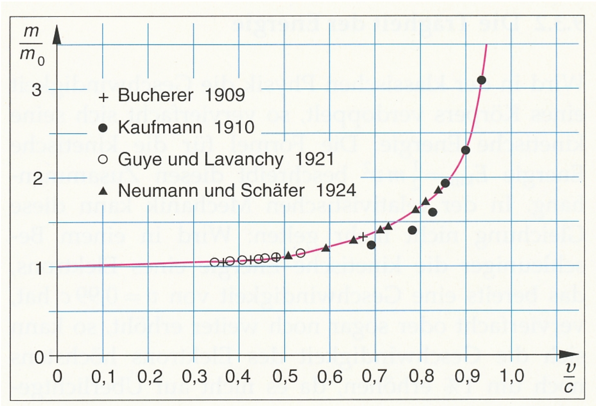
[2] A. Einstein zitiert nach S. Herrmann, Einstein anekdotisch, Stuttgart 1970

6. Die **Masse** eines Körpers ist **geschwindigkeitsabhängig**. Bezeichnet man die Masse eines ruhenden Körpers mit m_0, dann hat er bei der Geschwindigkeit v eine vergrößerte Masse m_{rel} nach

$$m_{\text{rel}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{v}{c}$$

Aus der Gleichung folgt, dass die Masse eines Körpers ____________________ wird, wenn sich v der Lichtgeschwindigkeit nähert.

Geschwindigkeiten größer als c sind ____.



7. **Addition der Geschwindigkeiten:** Bewegt sich ein Inertialsystem mit der Geschwindigkeit v und ein Körper relativ zu diesem mit der Geschwindigkeit w', so hat er im Ruhesystem nicht die klassisch erwartete Geschwindigkeit $v + w'$, sondern nur die Geschwindigkeit

$$w = \frac{v + w'}{1 + \frac{vw'}{c^2}}.$$

8. Masse und Energie sind äquivalent. Aus Masse kann Energie werden und umgekehrt. Ein ruhender Körper besitzt die Ruheenergie W_0 und ein mit der Geschwindigkeit v sich bewegender Körper die relativistische Energie W_{rel} nach

$$W_0 = m_0 \cdot c^2 \qquad \text{und} \qquad W_{\text{rel}} = m_{\text{rel}} \cdot c^2 = \underline{\qquad\qquad} = \underline{\qquad\qquad}$$

Die Differenz der beiden Energien ist die kinetische Energie:

$$W_{\text{kin}} = W_{\text{rel}} - W_0 =$$

9. Der relativistische Impuls ist $p_{\text{rel}} = m_{\text{rel}} \cdot v$.

10. Schreiben wir für W_{rel} kurz W und für p_{rel} kurz p, dann wird der Zusammenhang zwischen Energie und Impuls ausgedrückt durch den „relativistischen Pythagoras“:

$$W^2 = W_0^2 + (pc)^2$$

(Die Herleitung dazu ist eine Aufgabe.)

11. Für kleine Geschwindigkeiten sind einige Näherungen hilfreich:

$$\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx 1 + \frac{1}{2}x \quad \text{für} \quad |x| \ll 1.$$

Für die Relativitätstheorie wichtig (Setze $x = \left(\frac{v}{c}\right)^2$):

$$\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 \quad \text{für} \quad v \ll c$$

Aufgaben:

1. Bis zu welcher Geschwindigkeit muss ein Elektron beschleunigt werden, damit seine relativistische Masse auf den doppelten Wert seiner Ruhemasse ansteigt?

2. Der Physiklehrer der Q1 fühlt sich von einem Schüler gestört und wirft mit einem Kreidestück mit $m_0 = 10\,\text{g}$ und $v = 0{,}9994c$. Das Kreidestück verfehlt den Schüler und trifft nur die Wand.

   (a) Welche Masse hat das Kreidestück kurz vor dem Aufprall?

   (b) Welche kinetische Energie hat es?

3. (a) Um wieviel % wird ein Auto schwerer, wenn es statt zu stehen mit einer Geschwindigkeit von 100 km/h fährt?

   (b) Um wieviel würde es schwerer werden, wenn in unserem Universum die Lichtgeschwindigkeit c gleich der Schallgeschwindigkeit wäre?

4. Die Elektronen im DESY-Beschleuniger bei Hamburg haben bei einer kinetischen Energie $W_{\text{kin},1} = 3{,}5$ GeV eine Geschwindigkeit $v_1 = 0{,}999999989c$ und bei $W_{\text{kin},2} = 7$ GeV eine Geschwindigkeit $v_2 = 0{,}999999997c$.

(a) Um welchen Faktor ist in jedem der beiden Fälle die relativistische Masse der Elektronen größer als ihre Ruhemasse?

(b) Wie groß ist die relativistische Masse bei $W_{\text{kin},3} = 7{,}500$ MeV?

(c) Wie schnell bewegen sich die Elektronen in b)?

5. Zwei Körper bestehen aus dem gleichen Stoff. Kann man sagen, dass ihre Massen den Anzahlen der Atome proportional sind?

6. Die Bestrahlungsstärke des Sonnenlichtes auf Erdhöhe ist durch die *Solarkonstante* $S_0 = 1{,}359 \text{kW/m}^2$ gegeben. Die Erde hat einen mittleren Abstand von der Sonne von $R = 1{,}4960 \cdot 10^8$ km.

   (a) Welche Energie ΔW strahlt die Sonne pro Sekunde ab?

   (b) Welchen Massenverlust Δm erleidet sie dabei?

   (c) Zur Zeit hat die Sonne eine Masse $m_\odot = 1{,}989 \cdot 10^{30}$ kg. Schätze die Lebensdauer der Sonne ab!

   (d) Wie lange benötigte sie, um sämtliche Pkws in Deutschland (ca. 40 Millionen) mit einer durchschnittlichen Masse von ca. 1400 kg vollständig zu zerstrahlen?

7. Ein Heliumkern (He-4) besteht aus zwei Protonen und zwei Neutronen und hat die Kernmasse $m_{\text{He}} = 4{,}0015061u$ (atomare Masseneinheit $1u = 1{,}6605519 \cdot 10^{-27}$ kg. Vergleiche mit der Summe der Massen der Neutronen und Protonen [3], und bestimme den Massendefekt Δm und die entsprechende Energiedifferenz ΔW.

8. Nimm an, dass bei der Explosion einer Kernspaltungsbombe 0,1% des spaltbaren Materials von 3 kg als Energie freigesetzt werden.

   (a) Berechne den Energiebetrag.

   (b) Wieviel TNT müsste explodieren, um dieselbe Energie freizusetzen? Nimm dazu an, dass jedes Mol TNT bei der Explosion 343 kJ Energie liefert. Die molare Masse von TNT beträgt 0,227 kg/mol.

9. Die neuen Erkenntnisse der Relativitätstheorie bedeuten nicht, dass man die klassische Mechanik von Galilei und Newton vergessen kann. Vielmehr enthält die Relativitätstheorie die klassische Mechanik als Grenzfall für kleine Geschwindigkeiten.

   (a) Zeige, dass der relativistische Ausdruck für die kinetische Energie für kleine Geschwindigkeiten näherungsweise in die klassische Formel

   $$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$$

   übergeht.

[3] siehe Formelsammlung

(b) Zeige außerdem, dass man die Formel für die relativistische kinetische Energie *nicht* erhält, wenn man einfach in die klassische Formel statt m den Ausdruck

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

für die dynamische Masse einsetzt.

(c) Zeige, dass für $\frac{v}{c} < \frac{1}{10}$ der Fehler bei Benutzung des klassischen Ausdrucks für die kinetische Energie kleiner als 1% ist.

10. Herleitung für „relativistischen Pythagoras“:

$$p = m_{\text{rel}} \cdot v = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot v = \frac{m_0 \cdot c}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{v}{c} =$$

$$\Longrightarrow pc = \frac{\qquad}{\qquad} \cdot \qquad = \frac{\qquad}{\qquad} \cdot \qquad =$$

Aus $W = m_{\text{rel}} \cdot c^2 = \frac{W_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ folgt somit

$$W^2 =$$

$$W_0^2 =$$

$$W^2 - W_0^2 = \qquad\qquad =$$

und damit endlich

$$W^2 = W_0^2 + (pc)^2.$$

„Raffiniert ist der Herrgott, aber boshaft ist er nicht.“