
Was sie schon immer über die Relativitätstheorie wissen wollten

Aufgaben:

1. Bis zu welcher Geschwindigkeit muss ein Elektron beschleunigt werden, damit seine relativistische Masse auf den doppelten Wert seiner Ruhemasse ansteigt?

Lösung: Für die relativistische Masse m gilt: $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Wenn die relativistische Masse verdoppelt werden soll, gilt also

$$\begin{aligned} 2 \cdot m_0 &= \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad / : m_0 \\ 2 &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad / \text{ Kehrwert} \\ \sqrt{1-\beta^2} &= \frac{1}{2} \quad / \text{ Quadrieren} \\ 1-\beta^2 &= \frac{1}{4} \\ \beta^2 &= \frac{3}{4} \\ \left(\frac{v}{c}\right)^2 &= \frac{3}{4} \\ v^2 &= \frac{3}{4} \cdot c^2 \\ v &= \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot c = 0,87c \end{aligned}$$

2. Der Physiklehrer der Q1 fühlt sich von einem Schüler gestört und wirft mit einem Kreidestück mit $m_0 = 10 \text{ g}$ und $v = 0,9994c$. Das Kreidestück verfehlt den Schüler und trifft nur die Wand.

- (a) Welche Masse hat das Kreidestück kurz vor dem Aufprall?

Mit $v = 0,9994c$ folgt, dass $\beta = \frac{v}{c} = 0,9994$.

$$\begin{aligned} m &= \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ &= \frac{10 \text{ g}}{\sqrt{1-0,9994^2}} = 289 \text{ g} \end{aligned}$$

- (b) Welche kinetische Energie hat es?

Die kinetische Energie ist die Differenz zwischen der relativistischen Energie und der Ruheenergie:

$$\begin{aligned}
 W_{\text{kin}} &= W_{\text{rel}} - W_0 \\
 &= m_{\text{rel}} \cdot c^2 - m_0 \cdot c^2 \\
 &= (m_{\text{rel}} - m_0) \cdot c^2 \\
 &= (0,289 \text{ kg} - 0,01 \text{ kg}) \cdot \left(3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \\
 &= 2,51 \cdot 10^{16} \text{ J}
 \end{aligned}$$

Zum Vergleich: Ein Flugzeug mit 100 t und der Geschwindigkeit $1000 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ besitzt die kinetische Energie von $3,9 \cdot 10^9 \text{ J}$.

3. (a) Um wieviel % wird ein Auto schwerer, wenn es statt zu stehen mit einer Geschwindigkeit von 100 km/h fährt?

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = m_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2\right) = m_0 + m_0 \cdot \frac{1}{2}\beta^2 \\
 \Delta m &= m - m_0 = m_0 \cdot \frac{1}{2}\beta^2
 \end{aligned}$$

Der prozentuale Zuwachs ist dann

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta m}{m_0} &= \frac{1}{2}\beta^2 \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{27,78 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}\right)^2 \\
 &= 4,29 \cdot 10^{-15} = 4,29 \cdot 10^{-13}\%
 \end{aligned}$$

- (b) Um wieviel würde es schwerer werden, wenn in unserem Universum die Lichtgeschwindigkeit c gleich der Schallgeschwindigkeit wäre?

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta m}{m_0} &= \frac{1}{2}\beta^2 \text{ mit Näherung} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{27,78 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{333 \frac{\text{m}}{\text{s}}}\right)^2 \\
 &= 3,48 \cdot 10^{-3} = 0,348\% \\
 \frac{m}{m_0} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \text{ ohne Näherung} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{27,78 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{333 \frac{\text{m}}{\text{s}}}\right)^2}} \\
 &= 1,0035 = 100,35\% \text{ mit einem Zuwachs von } 0,35\%
 \end{aligned}$$

4. Die Elektronen im DESY-Beschleuniger bei Hamburg haben bei einer kinetischen Energie $W_{\text{kin},1} = 3,5 \text{ GeV}$ eine Geschwindigkeit $v_1 = 0,999999989c$ und bei $W_{\text{kin},2} = 7 \text{ GeV}$ eine Geschwindigkeit $v_2 = 0,999999997c$.

- (a) Um welchen Faktor ist in jedem der beiden Fälle die relativistische Masse der Elektronen größer als ihre Ruhemasse?

Bestimmung der Ruheenergie eines Elektrons:

$$\begin{aligned} W_0 &= m_0 \cdot c^2 = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot \left(2,9979 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \\ &= 8,1785 \cdot 10^{-14} \text{ J} = 5,1116 \cdot 10^6 \text{ eV} = 0,511 \text{ MeV} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\text{rel}} &= W_0 + W_{\text{kin}} \\ m_{\text{rel}} \cdot c^2 &= m_0 \cdot c^2 + W_{\text{kin}} \quad / : (m_0 \cdot c^2) \\ \frac{m_{\text{rel}}}{m_0} &= 1 + \frac{W_{\text{kin}}}{m_0 \cdot c^2} \\ &= 1 + \frac{3,5 \cdot 10^9 \text{ eV}}{0,511 \cdot 10^6 \text{ eV}} \\ &\approx 6850 \text{ für } W_{\text{kin},1} \end{aligned}$$

Für $W_{\text{kin},2}$ ergibt sich etwa der doppelte Wert 13699.

- (b) Wie groß ist die relativistische Masse bei $W_{\text{kin},3} = 7,500 \text{ MeV}$?

$$\begin{aligned} \frac{m_{\text{rel}}}{m_0} &= 1 + \frac{W_{\text{kin}}}{m_0 \cdot c^2} \\ &= 1 + \frac{7,5 \text{ MeV}}{0,511 \text{ MeV}} \\ &\approx 15,68 \\ m_{\text{rel}} &= 15,68 \cdot m_0 = 1,427 \cdot 10^{-29} \text{ kg} \end{aligned}$$

- (c) Wie schnell bewegen sich die Elektronen in b)?

$$\begin{aligned} \frac{m_{\text{rel}}}{m_0} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ \sqrt{1 - \beta^2} &= \frac{m_0}{m_{\text{rel}}} \\ 1 - \beta^2 &= \left(\frac{m_0}{m_{\text{rel}}} \right)^2 \\ \beta^2 &= 1 - \left(\frac{m_0}{m_{\text{rel}}} \right)^2 \\ \beta &= \sqrt{1 - \left(\frac{m_0}{m_{\text{rel}}} \right)^2} \\ &= 0,99796 \end{aligned}$$

5. Zwei Körper bestehen aus dem gleichen Stoff. Kann man sagen, dass ihre Massen den Anzahlen der Atome proportional sind?

6. Die Bestrahlungsstärke des Sonnenlichtes auf Erdhöhe ist durch die *Solarkonstante* $S_0 = 1,359 \text{ kW/m}^2$ gegeben. Die Erde hat einen mittleren Abstand von der Sonne von $R = 1,4960 \cdot 10^8 \text{ km}$.

- (a) Welche Energie ΔW strahlt die Sonne pro Sekunde ab?

Die Leistung der Sonne verteilt sich auf eine Kugeloberfläche einer Kugel mit dem Radius $R = 1,4960 \cdot 10^{11} \text{ m}$. Der Flächeninhalt der Kugeloberfläche ist $O = 4\pi R^2$. Die Solarkonstante gibt an, wieviel Leistung auf Erdhöhe pro m^2 ankommt. Also ist die Gesamtleistung der Sonne

$$P_{\text{Sonne}} = O \cdot S_0 = 4\pi R^2 \cdot S_0 = 4\pi \cdot (1,4960 \cdot 10^{11} \text{ m})^2 \cdot 1,359 \text{ kW/m}^2 = 3,88 \cdot 10^{26} \text{ W}$$

Nach $\Delta W = P \cdot t$ strahlt dann die Sonne in einer Sekunde die Energie $W = 3,88 \cdot 10^{26} \text{ J}$ ab.

- (b) Welchen Massenverlust Δm erleidet sie dabei?

Dem Betrag der abgestrahlten Energie ΔW entspricht ein Massenverlust Δm mit

$$\begin{aligned} \Delta W &= \Delta m \cdot c^2 \\ \Delta m &= \frac{\Delta W}{c^2} = \frac{3,88 \cdot 10^{26} \text{ J}}{(3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2} \\ &= 4,3 \cdot 10^9 \text{ kg} = 4,3 \text{ Millionen Tonnen} \end{aligned}$$

- (c) Zur Zeit hat die Sonne eine Masse $m_{\odot} = 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$. Schätze die Lebensdauer der Sonne ab!

$$\begin{aligned} \frac{m_{\odot}}{\Delta m} &= \frac{1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}}{4,3 \cdot 10^9 \text{ kg}} \\ &= 4,6 \cdot 10^{20} \\ 4,6 \cdot 10^{20} \text{ s} &= 1,46 \cdot 10^{13} a \text{ (Jahre)} \end{aligned}$$

Das Alter des Universums beträgt etwa $1,5 \cdot 10^{10}$ Jahre. In der Realität kann die Sonne natürlich nicht so lange leben, weil sie sich nicht komplett in Energie auflösen kann. Nach ein paar Milliarden Jahren ist schon Schluss.

- (d) Wie lange benötigte sie, um sämtliche PKWs in Deutschland (ca. 40 Millionen) mit einer durchschnittlichen Masse von ca. 1400 kg vollständig zu zerstrahlen? Setzt man die Masse aller PKW in Deutschland in Relation zum Massenverlust der Sonne in einer Sekunde, erhält man:

$$\frac{40 \cdot 10^6 \cdot 1400 \text{ kg}}{4,3 \cdot 10^9 \text{ kg}} = 12,96 \approx 13$$

Damit dauert die vollständige Vernichtung etwa 13 Sekunden.

7. Ein Heliumkern (He-4) besteht aus zwei Protonen und zwei Neutronen und hat die Kernmasse $m_{He} = 4,0015061u$ (atomare Masseneinheit $1u = 1,6605519 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$). Vergleiche mit der Summe der Massen der Neutronen und Protonen ¹, und bestimme den Massendefekt Δm und die entsprechende Energiedifferenz ΔW .

$$\begin{aligned}
 \Delta m &= (2m_n + 2m_p - m_{He}) \\
 &= \left(2 \cdot 1,6748 \cdot 10^{-27} + 2 \cdot 1,67264 \cdot 10^{-27} - 4,0015061 \cdot 1,6605519 \cdot 10^{-27} \right) \text{ kg} \\
 &= 5,02 \cdot 10^{-29} \text{ kg} \\
 \Delta W &= \Delta m \cdot c^2 \\
 &= 5,02 \cdot 10^{-29} \text{ kg} \cdot \left(3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \\
 &= 4,52 \cdot 10^{-12} \text{ J} = 28,2 \text{ MeV}
 \end{aligned}$$

8. Nimm an, dass bei der Explosion einer Kernspaltungsbombe 0,1% des spaltbaren Materials von 3 kg als Energie freigesetzt werden.

- (a) Berechne den Energiebetrag.

$$\begin{aligned}
 \Delta W &= \Delta m \cdot c^2 \\
 &= 0,001 \cdot 3 \text{ kg} \cdot \left(3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \\
 &= 2,696 \cdot 10^{14} \text{ J}
 \end{aligned}$$

- (b) Wieviel TNT müsste explodieren, um dieselbe Energie freizusetzen? Nimm dazu an, dass jedes Mol TNT bei der Explosion 343 kJ Energie liefert. Die molare Masse von TNT beträgt 0,227 kg/mol. Setzt man die Energie ΔW in Verhältnis zur Energie eines Mols TNT, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \frac{\Delta W}{W_{\text{mol}}} &= \frac{2,696 \cdot 10^{14} \text{ J}}{343 \cdot 10^3 \text{ J}} \\
 &= 7,86 \cdot 10^8 \text{ mol} \\
 m &= 7,86 \cdot 10^8 \text{ mol} \cdot 0,227 \frac{\text{kg}}{\text{mol}} \\
 &= 1,78 \cdot 10^8 \text{ kg} = 1,78 \cdot 10^5 \text{ t} \\
 &= 178\,000 \text{ t}
 \end{aligned}$$

9. Die neuen Erkenntnisse der Relativitätstheorie bedeuten nicht, dass man die klassische Mechanik von Galilei und Newton vergessen kann. Vielmehr enthält die Relativitätstheorie die klassische Mechanik als Grenzfall für kleine Geschwindigkeiten.

- (a) Zeige, dass der relativistische Ausdruck für die kinetische Energie für kleine Geschwindigkeiten näherungsweise in die klassische Formel

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$$

¹siehe Formelsammlung

übergeht.

$$\begin{aligned}
 W_{\text{kin}} &= mc^2 - m_0c^2 \\
 &= (m - m_0) \cdot c^2 \\
 &= \left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} - m_0 \right) \cdot c^2 \\
 &= \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right) \cdot m_0c^2 \\
 &= \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2 - 1 \right) \cdot m_0c^2 \quad \text{mit der Näherungsformel} \\
 &= \frac{1}{2}\beta^2 \cdot m_0c^2 \\
 &= \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \cdot m_0c^2 \\
 &= \frac{1}{2}m_0v^2
 \end{aligned}$$

- (b) Zeige außerdem, dass man die Formel für die relativistische kinetische Energie *nicht* erhält, wenn man einfach in die klassische Formel statt m den Ausdruck

$$\frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

für die dynamische Masse einsetzt.

Aus Teil (a) ergibt sich die „richtige“ Formel:

$$W_{\text{kin}} = \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right)}_{(*)} \cdot m_0c^2$$

Einfaches Ersetzen von m ergibt:

$$\begin{aligned}
 W_{\text{kin}} &= \frac{1}{2}m_{\text{rel}}v^2 \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} v^2 \\
 &= m_0c^2 \underbrace{\left(\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \cdot \left(\frac{v}{c}\right)^2 \right)}_{(**)}
 \end{aligned}$$

Die Terme für die kinetische Energie sind gleich, wenn der Term $(*)$ gleich dem

Term (**) ist, d.h. wenn

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 &= \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \left(\frac{v}{c}\right)^2 \cdot \sqrt{1-\beta^2} \\ 1 - \sqrt{1-\beta^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \\ \sqrt{1-\beta^2} &= 1 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{v}{c}\right)^2\end{aligned}$$

D.h., die Terme sind gleich, wenn die Näherung für kleine Geschwindigkeiten gilt.

- (c) Zeige, dass für $\frac{v}{c} < \frac{1}{10}$ der Fehler bei Benutzung des klassischen Ausdrucks für die kinetische Energie kleiner als 1% ist.

$$\begin{aligned}\frac{W_{\text{kin,rel.}} - W_{\text{kin, klassisch}}}{W_{\text{kin, rel.}}} &= 1 - \frac{W_{\text{kin, klassisch}}}{W_{\text{kin, rel.}}} \\ &= 1 - \frac{\frac{1}{2}m_0v^2}{m_{\text{rel}}c^2 - m_0c^2} \\ &= 1 - \frac{\frac{1}{2}m_0v^2}{\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}c^2 - m_0c^2} \\ &= 1 - \frac{\frac{1}{2}\beta^2}{\frac{1-\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2}})} \\ &= 1 - \frac{\frac{1}{2}\beta^2 \cdot \sqrt{1-\beta^2}}{1-\sqrt{1-\beta^2}} \\ &= 1 - \frac{\frac{1}{2}(0,1)^2 \cdot \sqrt{1-(0,1)^2}}{1-\sqrt{1-(0,1)^2}} \\ &= 1 - \frac{\frac{1}{2} \cdot 0,01 \cdot \sqrt{0,99}}{1-\sqrt{0,99}} \\ &= 0,0075 \\ &= 0,75\% < 1\%\end{aligned}$$

10. Herleitung für „relativistischen Pythagoras“:

$$p = m_{\text{rel}} \cdot v = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot v = \frac{m_0 \cdot c}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{v}{c} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \beta$$

$$\Rightarrow pc = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \beta = \frac{W_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \beta = W \cdot \beta$$

$$\text{Aus } W = m_{\text{rel}} \cdot c^2 = \frac{W_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \text{ folgt somit}$$

$$W^2 = \frac{W_0^2}{1-\beta^2}$$

$$W_0^2 = (1-\beta^2) \cdot W^2 = W^2 - \beta^2 W^2$$

$$W^2 - W_0^2 = \beta^2 W^2 = (pc)^2$$

und damit endlich

$$W^2 = W_0^2 + (pc)^2.$$