

# 1 Die klassische kinetische Energie

## 1.1 Kraft und Impuls

Die Kraft wird definiert als Impulsänderung  $\Delta p$  pro Zeit:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} \quad \text{bzw. besser} \quad F = \dot{p} = \frac{dp}{dt}$$

Der Impuls  $p$  ist dabei definiert als  $p = m \cdot v$ . Ist die Masse  $m$  eines Körpers während eines Vorgangs konstant, so ergibt sich die altbekannte Beziehung

$$F = \dot{p} = m \cdot \dot{v} = m \cdot a.$$

Im Allgemeinen sind aber  $m$  und  $v$  zeitlich veränderlich. Dann ergibt sich

$$p(t) = m(t) \cdot v(t) \quad \text{und}$$

$$F(t) = \dot{p} = \dot{m}v + m\dot{v}.$$

## 1.2 Energie

Die Arbeit und damit die Energie ist definiert als Wegintegral:

$$W = \int_{s_1}^{s_2} F(s) ds = \int_{s_1}^{s_2} \frac{dp}{dt} ds = \int_{s_1}^{s_2} \frac{d(mv)}{dt} ds = m \cdot \int_{s_1}^{s_2} \frac{dv}{dt} ds$$

bei konstanter Masse. Dann erhalten wir (siehe Substitutionsregel)

$$W = m \cdot \int_{v_1}^{v_2} \frac{ds}{dt} dv = m \cdot \int_{v_1}^{v_2} v dv.$$

Der Spezialfall, dass wir den Körper aus der Ruhe ( $v_1 = 0$ ) durch die Kraft beschleunigen, liefert

$$W = m \cdot \int_0^{v_2} v dv = \frac{1}{2}mv_2^2,$$

d.h. die altbekannte Formel für die kinetische Energie.

## 2 Die relativistische kinetische Energie

Wir bestimmen nun nach dem gleichen Verfahren die kinetische Energie im relativistischen Fall, in dem die Masse eine Funktion von  $v$  bzw.  $t$  ist:

$$W = \int_{s_1}^{s_2} F(s) ds = \int_{s_1}^{s_2} \dot{p} ds = \int_{s_1}^{s_2} (\dot{m}v + m\dot{v}) ds$$

Mit der Substitutionsregel ( $v = \frac{ds}{dt} \implies ds = v \cdot dt$ ) erhalten wir

$$W = \int_{t_1}^{t_2} (\dot{m}v + m\dot{v}) \cdot v dt = \int_{t_1}^{t_2} (\dot{m}v^2 + m\dot{v}v) dt.$$

Die Lösung dieses Integrals erscheint auf den ersten Blick aussichtslos. Werfen wir also einen zweiten Blick auf die Formel für die relativistische Masse:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Quadrieren und Multiplikation mit  $c^2$  liefert

$$m^2 \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right) = m_0^2 \quad \text{und} \quad m^2 c^2 - m^2 v^2 = m_0^2 c^2$$

Da die rechte Seite der Gleichung konstant ist, muss die Ableitung der linken Seite 0 ergeben. Wir müssen beachten, dass  $m$  und  $v$  Funktionen von  $t$  sind:

$$2m\dot{m}c^2 - 2m\dot{m}v^2 - m^2 2v\dot{v} = 0$$

Division durch  $2m$  liefert

$$\dot{m}c^2 - \dot{m}v^2 - m\dot{v}v = 0$$

und nach Umstellung erhalten wir die merkwürdige und wieder scheinbar nutzlose Beziehung

$$\dot{m}v^2 + m\dot{v}v = \dot{m}c^2.$$

Aber nach einem Blick zurück auf den obigen Integranden schreiben wir freudig

$$W = \int_{t_1}^{t_2} (\dot{m}v^2 + m\dot{v}v) dt = \int_{t_1}^{t_2} \dot{m}c^2 dt = c^2 \int_{t_1}^{t_2} \dot{m} dt = c^2 (m(t_2) - m(t_1))$$

Beschleunigt man speziell einen Körper von  $t_1 = 0$ , d.h. aus der Ruhe heraus bis zum Zeitpunkt  $t_2$ , bei dem der Körper die Geschwindigkeit  $v$  erreicht hat, so können wir den

Term  $m(t_1) = m_0$  als Ruhemasse und  $m(t_2)$  als relativistische Masse bei der Geschwindigkeit  $v$  ansehen. Somit erhalten wir für die kinetische Energie

$$W_{\text{kin}} = mc^2 - m_0c^2.$$

Die kinetische Energie ergibt sich also als Differenz zweier Energien. Somit können wir dem Körper in Ruhe die sogenannte *Ruheenergie*  $W_0 = m_0c^2$  zuschreiben, die zusammen mit der kinetischen Energie die *relativistische Energie*  $W_{\text{rel}} = mc^2$  ergibt. Anders formuliert:

$$W_{\text{rel}} = mc^2 = W_0 + W_{\text{kin}}.$$

### 3 Konsequenzen

Die wichtigste Konsequenz ist wohl, dass einem ruhenden Körper eine Energie zugeordnet werden kann, wobei der Energiebetrag gewaltig ist! In diesem Sinne spricht man von der Äquivalenz von Masse und Energie.

Experimentelle Fakten zeigen, dass die vollständige Umwandlung von Masse in Energie und umgekehrt möglich ist:

- Trifft ein Teilchen (z.B. ein Elektron) auf sein Antiteilchen (hier ein Positron), dann vernichten sie sich beide vollständig und es entsteht hochenergetische elektromagnetische Strahlung.
- Werden zwei Wasserstoffkerne mit zwei Neutronen verschmolzen, so entsteht Helium. Die Masse des Heliumkerns ist geringer als die Summe der Massen seiner Bestandteile. Masse ist also „verschwunden“ und hat sich in Energie verwandelt. Darum scheint die Sonne! Leider funktioniert nach dem gleichen Prinzip auch eine Wasserstoffbombe.
- Werden sehr schwere Kerne gespalten (z.B. Uran), so haben die Bruchstücke zusammen eine geringere Masse als der Ursprungskern. Die Massendifferenz hat sich in Energie verwandelt. So funktioniert ein Kernkraftwerk, aber auch eine Kernspaltungsbombe.
- Steht an einer bestimmten Stelle nur genügend Energie z.B. in Form von elektromagnetischer Strahlung zur Verfügung, so kann sich daraus Materie in Form von einem Teilchen-Antiteilchen-Paar bilden. Somit kann man mit genügend Energie unbekannte Teilchen „erzeugen“. Daran arbeiten die Physiker am CERN und anderswo.
- Gott hat vor ca. 15 Milliarden Jahren „einen Haufen Energie“ in die Welt gesetzt. Daraus entstand die Materie des Universums im *Urknall*. Zum Glück haben sich fast alle Photonen in Materie umgewandelt, denn sonst gäbe es „nur Licht“, aber niemanden, der es sehen könnte. Darum gibt es uns!

