

Informatik: Ergänzungen zur Rekursion

Gierhardt

Die Rekursion¹ haben wir uns so vorgestellt, dass beim rekursiven Aufruf einer Methode sich der Computer merkt, wo er eine Methode verlässt, um danach an der gleichen Stelle weiter machen zu können. Anschaulich könnte man das mit einem *Stapel* (engl.: stack) darstellen. Beim ersten Aufruf wird die Rückkehradresse auf ein Blatt Papier geschrieben, beim zweiten Aufruf wird wieder die Rückkehradresse auf ein neues Blatt geschrieben und dieses Blatt auf das erste gelegt (engl.: to push) und so weiter. Am Ende wird das oberste Blatt zuerst vom Stapel genommen (engl.: to pop) und sich bis zum untersten Blatt zurück gearbeitet.

Beispiele für rekursive Strukturen im weitesten Sinne:

1. **Geschichten innerhalb von Geschichten**; Filme innerhalb von Filmen: in Filmen treten oft Rückblendungen innerhalb von Rückblendungen auf, wobei man am Ende wieder bei der Haupthandlung landet. Beliebt sind Filme über Filmteams, die einen Film drehen. Besonders krasses Beispiel: *Hellzapoppin*, deutsche Fassung: *In der Hölle ist der Teufel los!*
2. BACH setzt häufig **musikalische Stapel** ein: Von der Grundtonart wird in die zweite Tonart gewechselt (to push), daraus nochmals in eine dritte Tonart *gepusht* und dann wieder zurück in die zweite *gepoppt* mit anschließendem *Pop* in die Grundtonart, was vom Zuhörer als Erleichterung empfunden wird.
3. **Stapel in der Sprache**
 - a) „Die notorische Eigenheit der deutschen Sprache, das Verbum ans Ende des Satzes zu stellen, über welche lustige Geschichten von geistesabwesenden Professoren, die einen Satz beginnen, die ganze Vorlesung, die langweilig empfunden wird, weiterreden und damit aufhören, dass sie eine Kette von Verben herunterleiern, wobei die Zuhörer, für die der Stapel schon längst jeglichen Zusammenhang verloren hat, völlig verwirrt werden, erzählt werden, ist ein gutes Beispiel für linguistisches Pushen und Poppen.“
 - b) „Die Kinder, die sich, da sie, weil sie schwimmen waren, sich amüsierten, gut verstanden, hatten sich erkältet.“

Die Kinder,
die sich,
da sie,
weil sie schwimmen waren,
sich amüsierten,
gut verstanden,
hatten sich erkältet.

¹von lat. recurrere = „zurücklaufen“

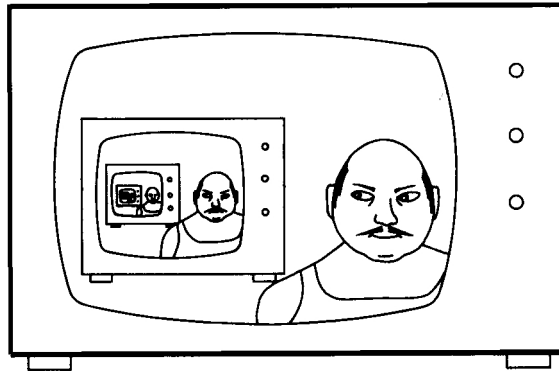
- c) Ein besonders krasses Beispiel findet man von CHRISTIAN MORGENSTERN in der Vorrede zu den Galgenliedern. Einer seiner Sätze endet mit „...kaum mehr zu unterschlagen versucht werden zu wollen vermag – gegenübergestanden und beigewohnt werden zu dürfen gelten lassen zu müssen sein möchte.“
- d) Merkwürdige Sätze:
- i. Dieser Satz enthält fünf Wörter.
 - ii. Der Satz „Der Satz enthält fünf Wörter.“ enthält fünf Wörter.
 - iii. Der Satz „Der Satz ‚Der Satz enthält fünf Wörter‘ enthält fünf Wörter.“ enthält fünf Wörter.
 - iv. Der Satz „Der Satz ist unendlich lang.“ ist unendlich lang.
 - v. Der Satz „Der Satz „Der Satz „Der Satz ... ist unendlich lang.“ ist unendlich lang.“ ist unendlich lang.“ ist unendlich lang.
 - vi. Dieser Satz ist falsch.
 - vii. Der Satz „Dieser Satz ist falsch.“ ist falsch.
 - viii. Der folgende Satz ist falsch. Der vorhergehende Satz ist richtig.
- e) Wer Rekursion verstehen will, muss vorher Rekursion verstehen. Verständlicherweise muss man daher, um die Rekursion zu verstehen, nicht nur erst die Rekursion verstehen, sondern auch, weil man die Rekursion verstehen will, zuerst die Rekursion verstehen, damit man die Rekursion verstehen kann und schließlich die Rekursion. Allerdings muss man, um die Rekursion wirklich zu verstehen, darum nicht nur erst die Rekursion verstehen, um die Rekursion zu verstehen, sondern auch erst die Rekursion verstehen, um dann die Rekursion zu verstehen, damit die Rekursion verstehen, damit die Rekursion verstehen und schlussendlich die Rekursion verstehen zu können.
- Allerdings sollte man spätestens an dieser Stelle ein Muster dahinter erkannt haben².

4. Stapel in der Pädagogik

Der Lehrer beginnt eine Stunde mit dem Anzeichnen eines rechtwinkligen Dreiecks, um zum Satz des Pythagoras zu kommen. Als der Name *Pythagoras* fällt (PUSH Pythagoras), kommt das Thema „Griechenland und die Antike“ zur Sprache (PUSH Antike). Da meldet sich ein Schüler und merkt an, dass er im letzten Sommer in Griechenland Urlaub gemacht habe (PUSH Urlaub). Vom Urlaub kommt man schließlich zum Termin für den nächsten Ferienanfang (PUSH Ferien). Wenn jetzt jeweils das POP vergessen wird, nähert man sich immer mehr dem „Stapelüberlauf“ an und die Stunde ist letztlich völlig daneben.

²aus <http://www.stupidedia.org>

5. Rekursion in Bildern



Schaltet man eine Videokamera an einen Bildschirm an und nimmt das Bild mit der Kamera auf, so kommt es zu ganz merkwürdigen Effekten bzw. Bildern. Dieses Phänomen ähnelt dem Speicherüberlauf bei Rekursion mit einem Computer.

Musiker auf einer Bühne kennen das Phänomen als Pfeifen, wenn die Mikrofone zu nah an den Lautsprechern stehen.

In Fernsehsendungen mit Telephonteilnehmern passiert das, wenn das Fernsehgerät zu nah am Telephon steht.

Der Maler M. C. ESCHER spielt in seinen Bildern häufiger mit dieser Thematik.

6. Rekursion in der Mathematik:

a) Definition der natürlichen Zahlen:

0 ist eine natürliche Zahl.

Der Nachfolger einer natürlichen Zahl ist wieder eine natürliche Zahl.

b) Die Multiplikation mit einer natürlichen Zahl wird auf die Addition zurückgeführt:

Das n -fache einer Zahl ist das $(n-1)$ -fache der Zahl plus der Zahl.

Ende der Rekursion: Das 1-fache einer Zahl ist die Zahl selbst.

c) Die Potenzierung mit einem natürlichen Exponenten wird auf die Multiplikation zurückgeführt:

Die n -te Potenz einer Zahl ist die $(n-1)$ -te Potenz der Zahl multipliziert mit der Zahl.

Ende der Rekursion: Die 1-te Potenz einer Zahl ist die Zahl selbst.

d) Die Fakultät einer Zahl natürlichen Zahl ist rekursiv definiert:

$$n! = (n - 1)! \cdot n$$

$$0! = 1$$

Das funktioniert dann in etwa so:

Man berechnet die Fakultät von 4,
indem man zunächst die Fakultät von 3 berechnet
und das Ergebnis mit 4 multipliziert.

| Man berechnet die Fakultät von 3,
| indem man zunächst die Fakultät von 2 berechnet
| und das Ergebnis mit 3 multipliziert.

| | Man berechnet die Fakultät von 2,
| | indem man zunächst die Fakultät von 1 berechnet
| | und das Ergebnis mit 2 multipliziert.

| | | Man berechnet die Fakultät von 1,
| | | indem man zunächst die Fakultät von 0 berechnet
| | | und das Ergebnis mit 1 multipliziert.

| | | | Die Fakultät von 0 ist nach Definition 1.
| | | | Die Fakultät von 1 ist also $1*1=1$.
| | | Die Fakultät von 2 ist also $1*2=2$.
| Die Fakultät von 3 ist also $2*3=6$.
Die Fakultät von 4 ist also $6*4=24$.

- e) Die in der Mathematik wohl berühmteste Zahlenfolge besteht aus den FIBONACCI-Zahlen. Beginnt man mit der Nummerierung bei 1, dann ist die n-te FIBONACCI-Zahl $\text{fibonacci}(n)$ rekursiv definiert durch:

$$\text{fibonacci}(1) = 1$$

$$\text{fibonacci}(2) = 1$$

$$\text{fibonacci}(n) = \text{fibonacci}(n-2) + \text{fibonacci}(n-1) \text{ für } n \text{ größer als } 2.$$

FIBONACCI-Zahlen treten in den verschiedensten Situationen auf, z.B. beim Pflanzenwachstum oder bei der Untersuchung von Aktiencharts.

7. Rekursionsprobleme bei Computer-Programmen

Ein Programm soll geschrieben werden, das nur feststellt, ob ein anderes Programm terminiert oder nicht, d.h. es soll feststellen, ob das Programm immer in endlicher Zeit zum Ende kommt.

Dieses Programm lässt man dann auf sich selbst los.

Viele weitere Beispiele aus den unterschiedlichsten Gebieten findet man übrigens in dem folgenden faszinierenden Buch

Douglas R. Hofstadter
Gödel, Escher, Bach
ein Endloses Geflochtenes Band
Klett-Cotta, 1985