Birds - do it
bees - do it
even educated fleas - do it
let's do it!
(Cole Porter, „Paris“)

Einführung

Einen Flohzirkus veranstaltet man am besten auf einem Tisch. Nehmen wir zu Anfang einen runden Tisch mit dem Radius R. Nun denken wir uns auf dem Tisch noch ein komplexes Koordinatensystem mit dem Ursprung in der Mitte.
Die Flöhe sind nun solchermaßen *educated*, dass sie die Koordinaten jedes Absprungpunktes kennen und zu einem bestimmten anderen Punkt hüpfen können. Sie hüpfen aber nicht wahllos zu irgendwelchen Punkten, sondern können aus den Koordinaten des Absprungpunktes einen Zielpunkt mit Hilfe einer **komplexen Funktion** berechnen.
Wir betrachten zu Beginn die recht einfache und für alle komplexen Zahlen z definierte Funktion f mit $f(z) = z^2 + c$ mit einer komplexen Konstanten c. Ein Floh betrachtet nun seinen Absprungpunkt als komplexe Zahl z, berechnet daraus den komplexen Funktionswert $f(z)$, nimmt diesen Wert als Ziel und springt dann dort hin.
Bis hierher ist der ganze Vorgang recht uninteressant. Interessant wird der Vorgang erst, wenn der Floh jeweils den angesprungenen Zielpunkt wieder als Startpunkt für einen neuen Sprung nimmt und so immer weiter auf dem Tisch herumhüpft. Man bekommt dann eine Folge von komplexen Zahlen z_1, z_2, z_3, $\ldots$, z_n, $z_{n+1} = f(z_n)$.
Nun kann man sich verschiedene Fragen stellen:

- Gibt es „interessante“, d.h. zirkusreife Sprungfolgen?
- Bleibt ein Floh immer auf dem Tisch oder fällt er bei einem bestimmten n herunter?
- Wie lange dauert es, bis ein Floh vom Tisch fällt?
- Welchen Einfluss hat der erste Startpunkt?
- Welchen Einfluss hat die Konstante c für einen bestimmten ersten Startpunkt?

Aufgaben:

1. Erweitere die Klasse `Komplex` um die Methode `quadrat()` und die Funktion `double betrag()`, die den Abstand der komplexen Zahl vom Ursprung liefert.

2. Lass durch ein Programm einen Floh einige Sprünge machen und die Punkte bzw. komplexen Zahlen ausgeben. Wenn er vom Tisch gefallen ist, soll eine Meldung ausgegeben werden. Wähle für den Radius des Tisches z.B. $R = 2$.

3. Lass einen Floh im Ursprung starten und dann z.B. 1000 Sprünge machen. Jeder Punkt soll in einer Turtle-Graphik durch einen Punkt dargestellt werden. Finde interessante Werte von c für zirkusreife Darbietungen.

4. Denke dir auf einem zweiten Tisch (ohne Flöhe) ein komplexes Koordinatensystem für Werte von c. Man nimmt nun einen bestimmten Wert von c, startet damit einen Floh auf dem ersten Tisch im Ursprung und lässt ihn z.B. $n = 100$ Sprünge machen. Wenn er nach n Sprüngen noch nicht vom Tisch gefallen ist, macht man auf dem zweiten Tisch eine Markierung (schwarzer Punkt) an der Stelle c. Fällt der Floh vom Tisch, macht man keine Markierung. Wie sieht der zweite Tisch aus, wenn man das für alle bzw. besser genügend viele Punkte c (je nach Bildschirmauflösung) gemacht hat?

5. Wie vorherige Aufgabe, aber nun sollen auch die heruntergefallenen Flöhe beachtet werden. Je nachdem, wie viele Sprünge es gedauert hat, bis ein Floh vom Tisch gefallen ist, wird der Punkt für c auf dem zweiten Tisch mit einer anderen Farbe eingefärbt. Möglich sind z.B. zyklische Einfärbungen.

6. Der Tisch für den Floh muss ja nicht unbedingt rund sein. Man experimentiere mit quadratischen oder rechteckigen Tischen.

7. Man wählt ein festes c. Nun merkt man sich den ersten Startpunkt des Flohs, lässt ihn hüpfen und färbt nun den Startpunkt mit einer Farbe entsprechend den oben angegebenen Regeln. Für jedes c erhält man nun ein eigenes Bild. Suche zirkusreife Werte für c!

8. Es muss ja nicht immer eine so einfache Funktion wie f mit $f(z) = z^2 + c$ sein. Experimentiere mit anderen komplexen Funktionen!

Viel Spaß bei der Entdeckung von Ästhetik in der Mathematik!