Theorem von Adelson-Velskii und Landis: Die Höhe eines AVL–ausgeglichenen Baumes ist um höchstens $44,04\%$ größer als diejenige seines vollständig ausgeglichenen Gegenstückes.
Beweis :
Für die Höhe h_{va} eines vollständig ausgeglichenen Baumes mit N Knoten gilt

$$h_{va} = [\log_2 N] + 1 \quad \text{bzw.} \quad \log_2 N < h_{va} \leq \log_2 N + 1. \tag{1}$$

Für die Knotenanzahl im am schlechtesten AVL–ausgeglichenen Baum T_h der Höhe h gilt

$$N(h) = \sum_{i=1}^{h} Fibo(i) = Fibo(h+2) - 1. \tag{2}$$

Die von BINET 1843 gefundene explizite Darstellung der Fibonacci–Zahlen lautet

$$\begin{aligned} Fibo(n) &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left[1 - (-1)^n\left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right)^n\right]. \end{aligned} \tag{3}$$

Damit folgt für die Anzahl N im T_h-Baum mit Gleichung (2)

$$\begin{aligned} N(h) &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{h+2} \left[1 - (-1)^{h+2}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right)^{h+2}\right] - 1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{h+2} \underbrace{\left[1 - (-1)^{h+2}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right)^{h+2} - \sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}+1}\right)^{h+2}\right]}_{\alpha} \\ &= \frac{\alpha}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{h+2}. \end{aligned} \tag{4}$$

Da sich die Bäume erst für $h \geq 4$ in der Höhe unterscheiden können, gilt für α sicher die Abschätzung

$$\begin{aligned} 1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right)^6 - \sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}+1}\right)^6 \leq{} & \alpha \leq 1 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right)^7 \\ 0{,}8722 \leq{} & \alpha \leq 1{,}0012 \\ 0{,}3900 \leq{} & \frac{\alpha}{\sqrt{5}} \leq 0{,}4478. \end{aligned} \tag{5}$$

Mit $\beta = \frac{\alpha}{\sqrt{5}}$ folgt dann für (4)

$$
\begin{aligned}
N(h) &= \beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{h+2} && (6)\\
\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{h+2} &= \beta^{-1}N\\
e^{\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)(h+2)} &= \beta^{-1}N\\
\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)(h+2) &= \ln\left(\beta^{-1}N\right)\\
h &= \frac{\ln\beta^{-1}+\ln N}{\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}-2\\
&= \frac{\ln N-\ln\beta}{\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}-2 = h_{avl}. && (7)
\end{aligned}
$$

Für das gesuchte Verhältnis folgt nun mit (7) und der Ungleichung (1)

$$
\begin{aligned}
\frac{h_{avl}}{h_{va}} &< \frac{\ln N-\ln\beta}{\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\log_2 N}-\frac{2}{\log_2 N} && (8)\\
&= \frac{\ln N}{\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\log_2 N}-\frac{\ln\beta}{\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\log_2 N}-\frac{2}{\log_2 N}\\
&= \frac{\ln 2}{\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}-\frac{\ln\beta\ln 2}{\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\ln N}-\frac{2\ln 2}{\ln N} \text{ mit } \log_2 N = \frac{\ln N}{\ln 2}\\
&= 1{,}44042009-\frac{\gamma}{\ln N} \text{ mit} && (9)\\
\gamma &= \frac{\ln 2}{\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}\ln\beta+2\ln 2\\
&= 1{,}44042009\ln\beta+2\ln 2. && (10)
\end{aligned}
$$

Für γ erhält man nun mit (5) die Abschätzung

$$0{,}02998 \leq \gamma \leq 0{,}2291, \qquad (11)$$

d.h. es gilt $\gamma > 0$ für den nur interessanten Fall, daß $h \geq 4$.

Zusammenfassung :

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\frac{h_{avl}}{h_{va}} &< 1{,}44042009-\frac{\gamma}{\ln N} \text{ für } h \geq 4 \text{ mit } 0{,}02998 \leq \gamma \leq 0{,}2291.\\
\frac{h_{avl}}{h_{va}} &= 1 \text{ für } h < 4.
\end{aligned}
}
$$

q.e.d.