Gierhardt

1. Berechne $\dfrac{2+3\sqrt{2}\cdot i}{1+\sqrt{2}\cdot i}$.

2. Bestimme die Polardarstellung von $z = 2 + 3i$.

3. Bestimme die Wurzeln von $z = 3(\cos 50° + i \sin 50°)$.

4. Löse in $\mathbb{C}$ die Gleichung $x^2 + x + 1 = 0$ nach einem Verfahren Deiner Wahl.

5. Löse durch quadratische Ergänzung:

   $$z^2 + (2 + 2i)z + 3i = 0$$

6. Beweise: Besitzt die quadratische Gleichung $w^2 + pw + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{R}$ die echt komplexe Lösung $z = a + bi$, so muß $p = -2a$ und $q = a^2 + b^2$ sein.

7. Bestimme rechnerisch und erläutere in Worten und mit einer Skizze, welches geometrische Objekt beschrieben wird.

   a)

   $$\mathcal{M} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = |z + 3| \wedge \Im(z) = 4\}$$

   b)

   $$\mathcal{M} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + 1| = 3 \wedge \Re(z) = -\frac{1}{2}\}$$

8. Die Gleichung $x^2 - 4x + y^2 - 6y = -11$ beschreibt einen Kreis. Bestimme eine Gleichung dieses Kreises in komplexer Form (Betragsgleichung).

9. Die Gleichung $|z - a| = b$ mit $z, a \in \mathbb{C}$ und $b \in \mathbb{R}^{>0}$ beschreibt einen Kreis mit dem Mittelpunkt a in der komplexen Zahlenebene. Zeige, daß dann die Gleichung

   $$z\bar{z} - a\bar{z} - \bar{a}z + a\bar{a} = b^2$$

   denselben Kreis beschreibt.

10. Die Gleichung

    $$z\bar{z} + (2 - i)z + (2 + i)\bar{z} + 2 = 0$$

    beschreibt einen Kreis in der komplexen Zahlenebene. Bestimme für diesen Kreis die Gleichung in Betragsform.