

# Kleine Algebra-Formelsammlung

## Mittelstufe (bis Klasse 10)

Dargestellt sind die wichtigsten Fakten und Gesetze, wobei diverse Ausnahmeregeln wie z.B. das Verbot der Division durch Null nicht immer angegeben sind.

### 1 Zahlenmengen

#### Natürliche Zahlen

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\} \tag{1}$$

#### Ganze Zahlen

$$\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\} \tag{2}$$

#### Rationale Zahlen

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \wedge q \neq 0 \right\} \tag{3}$$

Alle rationalen Zahlen lassen sich durch einen abbrechenden oder einen periodischen Dezimalbruch darstellen.

#### Irrationale Zahlen

Zahlen, die durch einen nicht-abbrechenden und nicht-periodischen Dezimalbruch dargestellt werden, nennt man *irrationale Zahlen*. Beispiele:

$$\sqrt{2} = 1,41421356 \dots$$

$$1,23456789101112131415161718192021222324252627282930 \dots$$

$$1,1011011101111011110111110 \dots$$

#### Reelle Zahlen

Vereinigt man die Menge  $\mathbb{Q}$  mit der Menge der irrationalen Zahlen, erhält man die Menge  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen.

### 2 Bruchrechnung

$\frac{a}{b}$  heißt *Bruch*.  $a$  heißt *Zähler* und  $b$  *Nenner* des Bruches.

## Kehrwert

$\frac{1}{a}$  heißt *Kehrwert* der Zahl  $a$ .  $\frac{b}{a}$  heißt *Kehrwert* des Bruches  $\frac{a}{b}$ .  
Es gilt:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1 \quad \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a} \quad \frac{1}{\frac{1}{a}} = a \quad (4)$$

## Erweitern und Kürzen

Beim *Erweitern* werden Zähler **und** Nenner mit der gleichen Zahl (ungleich Null) multipliziert:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} \quad (5)$$

Beim *Kürzen* werden Zähler **und** Nenner durch die gleiche Zahl (ungleich Null) dividiert:

$$\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c} \quad (6)$$

Kürzen bei Produkten:

$$\frac{a \cdot b}{a \cdot c} = \frac{b}{c} \quad (7)$$

Kürzen bei Summen und Differenzen:

$$\frac{ab + ac}{ad} = \frac{a(b + c)}{ad} = \frac{b + c}{d} \quad \frac{ab - ac}{ad} = \frac{a(b - c)}{ad} = \frac{b - c}{d} \quad (8)$$

$$\frac{ad}{ab + ac} = \frac{ad}{a(b + c)} = \frac{d}{b + c} \quad \frac{ad}{ab - ac} = \frac{ad}{a(b - c)} = \frac{d}{b - c} \quad (9)$$

Zähler und Nenner müssen als **Produkt** vorliegen.

Merkregel: „*Differenzen und Summen kürzen nur die Dummen!*“

## Multiplikation

mit einer Zahl:

$$a \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{d} \quad (10)$$

mit einem Bruch:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \quad (11)$$

## Division

durch eine Zahl:

$$\frac{a}{b} : c = \frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc} \quad (12)$$

durch einen Bruch:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \quad (13)$$

## Addition und Multiplikation

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b} \quad (14)$$

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{bc}{bd} = \frac{ad \pm bc}{bd} \quad (15)$$

## Prozentrechnung

ist Bruchrechnung mit der Abkürzung

$$1\% = \frac{1}{100} \quad (16)$$

## 3 Negative Zahlen

### Betrag

Der Betrag einer reellen Zahl ist wie folgt definiert:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases} \quad (17)$$

Es gilt:

$$|x| = |-x| \quad |x| \geq 0 \quad |x \cdot y| = |x| \cdot |y| \quad \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \quad (18)$$

### Rechenregeln

bei Addition und Subtraktion:

$$x + (+y) = x + y \quad x + (-y) = x - y \quad x - (+y) = x - y \quad x - (-y) = x + y \quad (19)$$

bei Multiplikation:

$$(+x) \cdot (+y) = xy \quad (+x) \cdot (-y) = -xy \quad (-x) \cdot (+y) = -xy \quad (-x) \cdot (-y) = xy \quad (20)$$

bei Division:

$$\frac{+x}{+y} = \frac{x}{y} \quad \frac{+x}{-y} = -\frac{x}{y} \quad \frac{-x}{+y} = -\frac{x}{y} \quad \frac{-x}{-y} = \frac{x}{y} \quad (21)$$

bei Potenzierung:

Achtung: Es gilt weiterhin „Punkt- vor Strichrechnung!“. Potenzen zählen zur Punktrechnung. Beispiel:

$$(-2)^2 \neq -2^2$$

$$(+x)^2 = x^2 \quad (-x)^2 = x^2 \quad (22)$$

$$(+x)^3 = x^3 \quad (-x)^3 = -x^3 \quad (23)$$

$$(-x)^n = \begin{cases} x^n & \text{für } n \text{ gerade.} \\ -x^n & \text{für } n \text{ ungerade.} \end{cases} \quad (24)$$

bei Summen und Differenzen:

$$-a - b = -(a + b) \quad -a + b = -(a - b) = b - a \quad (25)$$

## 4 Termumformungen

$$\text{Punkt- vor Strichrechnung!} \quad (26)$$

### Kommutativgesetze

$$a + b = b + a \quad a \cdot b = b \cdot a \quad (27)$$

### Assoziativgesetze

$$a + (b + c) = (a + b) + c \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \quad (28)$$

### Distributivgesetz

$$a \cdot (b + c) = ab + ac \quad (29)$$

### Produkte von Summen

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd \quad (30)$$

### Binomische Formeln

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (31)$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (32)$$

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2 \quad (33)$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad (34)$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \quad (35)$$

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \quad (36)$$

## 5 Quadratische Gleichungen

Die quadratische Gleichung  $x^2 + px + q = 0$  in der sogenannten  $p$ - $q$ -Form hat je nach Vorzeichen der *Diskriminante* keine, genau eine oder genau zwei Lösungen.

Ist  $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$ , dann besitzt die Gleichung keine reellen Lösungen.

Ist  $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$ , dann besitzt die Gleichung die Lösung  $x = -\frac{p}{2}$

Ist  $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$ , dann besitzt die Gleichung die zwei Lösungen

$$x_{1;2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad (37)$$

und es gilt

$$x^2 + px + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \quad (38)$$

und der Satz von VIETA:

$$x_1 + x_2 = -p \quad x_1 \cdot x_2 = q \quad (39)$$

## 6 Gleichungen und Ungleichungen

Äquivalenzumformungen ändern die Lösungsmenge einer Gleichung oder Ungleichung nicht.

**Äquivalenzumformungen bei Gleichungen:**

- Addieren oder Subtrahieren einer Zahl auf beiden Gleichungsseiten.
- Multiplikation mit einer Zahl ungleich 0 auf beiden Gleichungsseiten.
- Division durch eine Zahl ungleich 0 auf beiden Gleichungsseiten.
- Kehrtwertbildung auf beiden Gleichungsseiten, wenn kein Nenner 0 entsteht.

**Äquivalenzumformungen bei Ungleichungen:**

- Addieren oder Subtrahieren einer Zahl auf beiden Ungleichungsseiten.
- Multiplikation mit einer Zahl größer 0 auf beiden Ungleichungsseiten.
- Division durch eine Zahl größer 0 auf beiden Ungleichungsseiten.
- Multiplikation mit einer Zahl kleiner 0 auf beiden Ungleichungsseiten und Umkehrung des Relationszeichens.
- Division durch eine Zahl kleiner 0 auf beiden Ungleichungsseiten und Umkehrung des Relationszeichens.

Quadrieren beider Gleichungsseiten ist **keine** Äquivalenzumformung, weil sich die Lösungsmenge vergrößern kann.

### Bruchgleichungen

$$\text{Multiplikation mit dem Hauptnenner und Definitionsmenge beachten.} \quad (40)$$

## Wurzelgleichungen

Separation der Wurzeln – Quadrieren, bis keine Wurzel mehr vorhanden ist –  
Definitionsmenge beachten – Probe machen (41)

## 7 Potenzen

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ Faktoren } a} \quad \text{mit } a \in \mathbb{R}; \quad n \in \mathbb{N} \quad (42)$$

heißt *Potenz*.  $a$  heißt *Basis* und  $n$  *Exponent*.

Nicht-positive Exponenten werden wie folgt definiert:

$$a^0 = 1 \quad (43)$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (44)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n \quad (45)$$

## Potenzgesetze

Gleiche Basen:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (46)$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (47)$$

Gleiche Exponenten:

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n \quad (48)$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad (49)$$

Potenzierung von Potenzen:

$$(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m \quad (50)$$

## Gebrochene Exponenten

Potenzen mit gebrochenen Exponenten werden als Wurzeln definiert.

Für alle  $m, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$  und  $a \in \mathbb{R}$  mit  $a > 0$  gilt:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (51)$$

## 8 Wurzeln

Die  $n$ -te Wurzel aus  $a \geq 0$  wird wie folgt definiert:

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a \text{ und } b \geq 0 \text{ und } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq 2. \quad (52)$$

$a$  heißt *Radikand* und  $n$  *Wurzelexponent*.

## Wurzelgesetze

Wurzelgesetze sind Potenzgesetze mit gebrochenen Exponenten.  
Gleiche Radikanden:

$$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{m}} \cdot a^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} = a^{\frac{n+m}{mn}} = \sqrt[mn]{a^{m+n}} \quad (53)$$

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{a}} = \frac{a^{\frac{1}{m}}}{a^{\frac{1}{n}}} = a^{\frac{1}{m} - \frac{1}{n}} = a^{\frac{n-m}{mn}} = \sqrt[mn]{a^{n-m}} \quad (54)$$

Gleiche Wurzelexponenten:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad (55)$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad (56)$$

Wurzeln von Wurzeln:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} \quad (57)$$

## 9 Logarithmen

$$\log_b x = h \iff b^h = x, \text{ wobei } b, x \in \mathbb{R}; b \neq 1 \quad (58)$$

$b$  heißt *Basis*,  $x$  *Numerus* und  $h$  *Logarithmus*.

Merke: Logarithmus bedeutet Hochzahl bzw. Exponent!

### Spezielle Logarithmen

$$\log_{10} x = \lg x \quad (59)$$

$$\log_e x = \ln x \quad (60)$$

### Logarithmieren

Die Logarithmusfunktion ist die Umkehrung der Exponentialfunktion. Logarithmieren und Potenzieren „heben sich gegenseitig auf“.

$$b^{\log_b x} = x \quad \log_b(b^x) = x \quad (61)$$

Speziell

$$10^{\lg x} = x \quad \lg(10^x) = x \quad (62)$$

$$e^{\ln x} = x \quad \ln(e^x) = x \quad (63)$$

## Logarithmengesetze

$$\log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y \quad (64)$$

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y \quad (65)$$

$$\log_b x^r = r \cdot \log_b x \quad (66)$$

$$\log_b x = \frac{\log_c x}{\log_c b} = \frac{\ln x}{\ln b} = \frac{\lg x}{\lg b} \quad (67)$$

Jede Exponentialfunktion mit der Basis  $b$  lässt sich als Funktion mit der Basis  $e$  (Eulersche Zahl) schreiben:

$$b^x = (e^{\ln b})^x = e^{x \cdot \ln b} \quad (68)$$