Kleine Algebra-Formelsammlung

Mittelstufe (bis Klasse 10)

Dargestellt sind die wichtigsten Fakten und Gesetze, wobei diverse Ausnahmeregeln wie z.B. das Verbot der Division durch Null nicht immer angegeben sind.

1 Zahlenmengen

Natürliche Zahlen

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \ldots\} \tag{1}$$

Ganze Zahlen

$$\mathbb{Z} = \{\ldots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \ldots\} \tag{2}$$

Rationale Zahlen

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \middle| \, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \wedge q \neq 0 \right\} \tag{3}$$

Alle rationalen Zahlen lassen sich durch einen abbrechenden oder einen periodischen Dezimalbruch darstellen.

Irrationale Zahlen

Zahlen, die durch einen nicht-abbrechenden und nicht-periodischen Dezimalbruch dargestellt werden, nennt man *irrationale Zahlen.* Beispiele:

$$\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$$

$$1{,}234567891011121314151617181920212223242526272829 30\ldots$$

$$1{,}101101110111101111101111110\ldots$$

Reelle Zahlen

Vereinigt man die Menge $\mathbb{Q}$ mit der Menge der irrationalen Zahlen, erhält man die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen.

2 Bruchrechnung

$\frac{a}{b}$ heißt *Bruch.* a heißt *Zähler* und b *Nenner* des Bruches.

Kehrwert

$\frac{1}{a}$ heißt *Kehrwert* der Zahl a. $\frac{b}{a}$ heißt *Kehrwert* des Bruches $\frac{a}{b}$.
Es gilt:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1 \qquad \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a} \qquad \frac{1}{\frac{1}{a}} = a \tag{4}$$

Erweitern und Kürzen

Beim *Erweitern* werden Zähler **und** Nenner mit der gleichen Zahl (ungleich Null) multipliziert:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} \tag{5}$$

Beim *Kürzen* werden Zähler **und** Nenner durch die gleiche Zahl (ungleich Null) dividiert:

$$\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c} \tag{6}$$

Kürzen bei Produkten:

$$\frac{a \cdot b}{a \cdot c} = \frac{b}{c} \tag{7}$$

Kürzen bei Summen und Differenzen:

$$\frac{ab + ac}{ad} = \frac{a(b + c)}{ad} = \frac{b + c}{d} \qquad \frac{ab - ac}{ad} = \frac{a(b - c)}{ad} = \frac{b - c}{d} \tag{8}$$

$$\frac{ad}{ab + ac} = \frac{ad}{a(b + c)} = \frac{d}{b + c} \qquad \frac{ad}{ab - ac} = \frac{ad}{a(b - c)} = \frac{d}{b - c} \tag{9}$$

Zähler und Nenner müssen als **Produkt** vorliegen.
Merkregel: *„Differenzen und Summen kürzen nur die Dummen!“*

Multiplikation

mit einer Zahl:

$$a \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{d} \tag{10}$$

mit einem Bruch:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \tag{11}$$

Division

durch eine Zahl:

$$\frac{a}{b} : c = \frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc} \tag{12}$$

durch einen Bruch:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \tag{13}$$

Addition und Multiplikation

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b} \tag{14}$$

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{bc}{bd} = \frac{ad \pm bc}{bd} \tag{15}$$

Prozentrechnung

ist Bruchrechnung mit der Abkürzung

$$1\% = \frac{1}{100} \tag{16}$$

3 Negative Zahlen

Betrag

Der Betrag einer reellen Zahl ist wie folgt definiert:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases} \tag{17}$$

Es gilt:

$$|x| = |-x| \qquad |x| \geq 0 \qquad |x \cdot y| = |x| \cdot |y| \qquad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \tag{18}$$

Rechenregeln

bei Addition und Subtraktion:

$$x + (+y) = x + y \qquad x + (-y) = x - y \qquad x - (+y) = x - y \qquad x - (-y) = x + y \tag{19}$$

bei Multiplikation:

$$(+x) \cdot (+y) = xy \qquad (+x) \cdot (-y) = -xy \qquad (-x) \cdot (+y) = -xy \qquad (-x) \cdot (-y) = xy \tag{20}$$

bei Division:

$$\frac{+x}{+y} = \frac{x}{y} \qquad \frac{+x}{-y} = -\frac{x}{y} \qquad \frac{-x}{+y} = -\frac{x}{y} \qquad \frac{-x}{-y} = \frac{x}{y} \tag{21}$$

bei Potenzierung:
Achtung: Es gilt weiterhin „Punkt- vor Strichrechnung!“. Potenzen zählen zur Punktrechnung. Beispiel:

$$(-2)^2 \neq -2^2$$

$$(+x)^2 = x^2 \qquad (-x)^2 = x^2 \tag{22}$$

$$(+x)^3 = x^3 \qquad (-x)^3 = -x^3 \tag{23}$$

$$(-x)^n = \begin{cases} x^n & \text{für } n \text{ gerade.} \\ -x^n & \text{für } n \text{ ungerade.} \end{cases} \tag{24}$$

bei Summen und Differenzen:

$$-a - b = -(a+b) \qquad -a + b = -(a-b) = b - a \tag{25}$$

4 Termumformungen

$$\text{Punkt- vor Strichrechnung!} \tag{26}$$

Kommutativgesetze

$$a + b = b + a \qquad a \cdot b = b \cdot a \tag{27}$$

Assoziativgesetze

$$a + (b + c) = (a + b) + c \qquad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \tag{28}$$

Distributivgesetz

$$a \cdot (b + c) = ab + ac \tag{29}$$

Produkte von Summen

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd \tag{30}$$

Binomische Formeln

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{31}$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \tag{32}$$

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2 \tag{33}$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \tag{34}$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \tag{35}$$

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \tag{36}$$

5 Quadratische Gleichungen

Die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ in der sogenannten p-q-Form hat je nach Vorzeichen der *Diskriminante* keine, genau eine oder genau zwei Lösungen.
Ist $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$, dann besitzt die Gleichung keine reellen Lösungen.
Ist $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$, dann besitzt die Gleichung die Lösung $x = -\frac{p}{2}$
Ist $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$, dann besitzt die Gleichung die zwei Lösungen

$$x_{1;2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \tag{37}$$

und es gilt

$$x^2 + px + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \tag{38}$$

und der Satz von VIETA:

$$x_1 + x_2 = -p \qquad\qquad x_1 \cdot x_2 = q \tag{39}$$

6 Gleichungen und Ungleichungen

Äquivalenzumformungen ändern die Lösungsmenge einer Gleichung oder Ungleichung nicht.
Äquivalenzumformungen bei Gleichungen:

- Addieren oder Subtrahieren einer Zahl auf beiden Gleichungsseiten.
- Multiplikation mit einer Zahl ungleich 0 auf beiden Gleichungsseiten.
- Division durch eine Zahl ungleich 0 auf beiden Gleichungsseiten.
- Kehrtwertbildung auf beiden Gleichungsseiten, wenn kein Nenner 0 entsteht.

Äquivalenzumformungen bei Ungleichungen:

- Addieren oder Subtrahieren einer Zahl auf beiden Ungleichungsseiten.
- Multiplikation mit einer Zahl größer 0 auf beiden Ungleichungsseiten.
- Division durch eine Zahl größer 0 auf beiden Ungleichungsseiten.
- Multiplikation mit einer Zahl kleiner 0 auf beiden Ungleichungsseiten und Umkehrung des Relationszeichens.
- Division durch eine Zahl kleiner 0 auf beiden Ungleichungsseiten und Umkehrung des Relationszeichens.

Quadrieren beider Gleichungsseiten ist **keine** Äquivalenzumformung, weil sich die Lösungsmenge vergrößern kann.

Bruchgleichungen

Multiplikation mit dem Hauptnenner und Definitionsmenge beachten. (40)

Wurzelgleichungen

$$\text{Separation der Wurzeln – Quadrieren, bis keine Wurzel mehr vorhanden ist –}$$
$$\text{Definitionsmenge beachten – Probe machen} \tag{41}$$

7 Potenzen

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ Faktoren } a} \quad \text{mit } a \in \mathbb{R};\ n \in \mathbb{N} \tag{42}$$

heißt *Potenz*. a heißt *Basis* und n *Exponent*.
Nicht-positive Exponenten werden wie folgt definiert:

$$a^0 = 1 \tag{43}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \tag{44}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n \tag{45}$$

Potenzgesetze

Gleiche Basen:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \tag{46}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \tag{47}$$

Gleiche Exponenten:

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n \tag{48}$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \tag{49}$$

Potenzierung von Potenzen:

$$(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m \tag{50}$$

Gebrochene Exponenten

Potenzen mit gebrochenen Exponenten werden als Wurzeln definiert.
Für alle $m, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ und $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ gilt:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \qquad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \tag{51}$$

8 Wurzeln

Die n-te Wurzel aus $a \geq 0$ wird wie folgt definiert:

$$\sqrt[n]{a} = b \Longleftrightarrow b^n = a \text{ und } b \geq 0 \text{ und } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq 2. \tag{52}$$

a heißt *Radikand*und n *Wurzelexponent*.

Wurzelgesetze

Wurzelgesetze sind Potenzgesetze mit gebrochenen Exponenten.
Gleiche Radikanden:

$$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{m}} \cdot a^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}} = a^{\frac{n+m}{mn}} = \sqrt[mn]{a^{m+n}} \tag{53}$$

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{a}} = \frac{a^{\frac{1}{m}}}{a^{\frac{1}{n}}} = a^{\frac{1}{m}-\frac{1}{n}} = a^{\frac{n-m}{mn}} = \sqrt[mn]{a^{n-m}} \tag{54}$$

Gleiche Wurzelexponenten:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \tag{55}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \tag{56}$$

Wurzeln von Wurzeln:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} \tag{57}$$

9 Logarithmen

$$\log_b x = h \iff b^h = x, \text{ wobei } b, x \in \mathbb{R}; b \neq 1 \tag{58}$$

b heißt *Basis*, x *Numerus* und h *Logarithmus*.
Merke: Logarithmus bedeutet Hochzahl bzw. Exponent!

Spezielle Logarithmen

$$\log_{10} x = \lg x \tag{59}$$

$$\log_e x = \ln x \tag{60}$$

Logarithmieren

Die Logarithmusfunktion ist die Umkehrung der Exponentialfunktion. Logarithmieren und Potenzieren „heben sich gegenseitig auf“.

$$b^{\log_b x} = x \qquad \log_b(b^x) = x \tag{61}$$

Speziell

$$10^{\lg x} = x \qquad \lg(10^x) = x \tag{62}$$

$$e^{\ln x} = x \qquad \ln(e^x) = x \tag{63}$$

Logarithmengesetze

$$\log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y \tag{64}$$

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y \tag{65}$$

$$\log_b x^r = r \cdot \log_b x \tag{66}$$

$$\log_b x = \frac{\log_c x}{\log_c b} = \frac{\ln x}{\ln b} = \frac{\lg x}{\lg b} \tag{67}$$

Jede Exponentialfunktion mit der Basis b lässt sich als Funktion mit der Basis e (Eulersche Zahl) schreiben:

$$b^x = \left(e^{\ln b}\right)^x = e^{x \cdot \ln b} \tag{68}$$