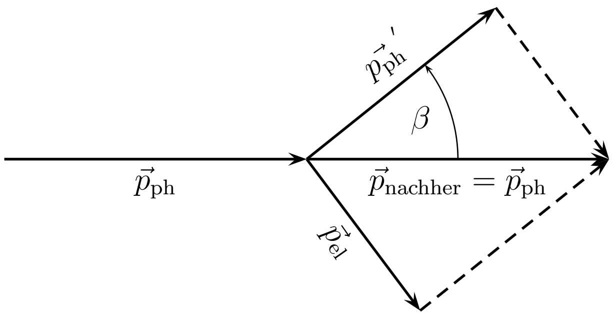
Stößt ein Photon gegen ein praktisch ruhend gedachtes, quasi freies Elektron, so müssen bei Annahme der Teilcheneigenschaft des Photons Energie- und Impulserhaltungssatz gelten. Wegen der hohen Energie der Röntgenphotonen ist eine relativistische Betrachtung nötig.



$$\text{Impulsbilanz:}\quad p_{\text{el}}^2 = p_{\text{ph}}^2 + {p'_{\text{ph}}}^2 - 2p_{\text{ph}}p'_{\text{ph}}\cos\beta \tag{1}$$

$$\text{Energiebilanz:}\quad W_{\text{ph}} + W_0 = W'_{\text{ph}} + W_{el} \tag{2}$$

$$\text{Relativistischer Pythagoras:}\quad W_{\text{el}}^2 = W_0^2 + (p_{\text{el}}c)^2 \tag{3}$$

Um die Impulsgleichung (1) mit der Energiegleichung (2) zusammen verarbeiten zu können, müssen die Impulsterme wegen (3) auf die Form pc gebracht werden:

$$(p_{\text{el}}c)^2 = (p_{\text{ph}}c)^2 + (p'_{\text{ph}}c)^2 - 2\,(p_{\text{ph}}c)\,(p'_{\text{ph}}c)\,\cos\beta$$

Nun drückt man die pc-Terme durch Energieterme aus,

$$(p_{\text{el}}c)^2 = W_{\text{el}}^2 - W_0^2 \quad \text{(siehe rel. Pyth.)}$$

$$p_{\text{ph}}c = m_{\text{ph}}c \cdot c = m_{\text{ph}}c^2 = W_{\text{ph}}$$

$$p'_{\text{ph}}c = W'_{\text{ph}}$$

setzt in die Impulsgleichung ein

$$W_{\text{el}}^2 - W_0^2 = W_{\text{ph}}^2 + {W'_{\text{ph}}}^2 - 2\,W_{\text{ph}}\,W'_{\text{ph}}\,\cos\beta \tag{4}$$

und löst nach der Elektronenenergie auf:

$$\underbrace{W_{\text{el}}^2 = W_0^2 + W_{\text{ph}}^2 + {W'_{\text{ph}}}^2}_{\text{siehe (6)}} \underbrace{-2W_{\text{ph}}W'_{\text{ph}}\cos\beta} \tag{5}$$

Löst man die Gleichung (2) ebenso nach der Elektronenenergie auf und quadriert, so ergibt sich mit einer „trinomischen Formel“

$$\underbrace{W_{\text{el}}^2 = W_0^2 + W_{\text{ph}}^2 + {W'_{\text{ph}}}^2}_{\text{siehe (5)}} + \underbrace{2W_0W_{\text{ph}} - 2W_0W'_{\text{ph}} - 2W_{\text{ph}}W'_{\text{ph}}} \tag{6}$$

Vergleicht man die Gleichungen (5) und (6), so stellt man fest, dass die Terme am Anfang jeweils gleich sind. Dann müssen auch die Terme am Ende gleich sein:

$$\overbrace{2W_0W_{\text{ph}} - 2W_0W'_{\text{ph}} - 2W_{\text{ph}}W'_{\text{ph}}} = \overbrace{-2W_{\text{ph}}W'_{\text{ph}}\cos\beta}$$

Dann ergibt sich

$$\begin{aligned}
2W_0(W_{\text{ph}} - W'_{\text{ph}}) &= 2W_{\text{ph}}W'_{\text{ph}} - 2W_{\text{ph}}W'_{\text{ph}}\cos\beta \\
2W_0(W_{\text{ph}} - W'_{\text{ph}}) &= 2W_{\text{ph}}W'_{\text{ph}}(1 - \cos\beta) \\
W_{\text{ph}} - W'_{\text{ph}} &= \frac{W_{\text{ph}}W'_{\text{ph}}}{W_0}(1 - \cos\beta) \\
\frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'} &= \frac{hc \cdot hc}{\lambda\lambda' m_e c^2}(1 - \cos\beta) \\
\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} &= \frac{hc}{\lambda\lambda' m_e c^2}(1 - \cos\beta) \\
\frac{\lambda' - \lambda}{\lambda\lambda'} &= \frac{hc}{\lambda\lambda' m_e c^2}(1 - \cos\beta) \\
\lambda' - \lambda &= \frac{hc}{m_e c^2}(1 - \cos\beta) \\
\Delta\lambda = \lambda' - \lambda &= \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\beta)
\end{aligned}$$

Zusammenfassung: Stößt ein Photon gegen ein praktisch ruhend gedachtes, quasi freies Elektron, so beobachtet man, dass die Wellenlänge des abgelenkten Photons größer als die Wellenlänge des ursprünglichen Photons ist. Die Wellenlängenänderung hängt dabei nur vom Winkel β ab, unter dem das Photon gestreut wird:

$$\boxed{\Delta\lambda = \lambda_c \cdot (1 - \cos\beta) \quad \text{mit } \lambda_c = \frac{h}{m_e c} \approx 2{,}48\,\text{pm} \quad (\text{COMPTON-Wellenlänge})}$$